3. Schulstunde

zum Thema…

zwei Geraden,

Du lernst in programmierter Form

BERECHNUNG VON SCHNITTPUNKT UND SCHNITTWINKEL VON NICHT-PARALLELEN GERADEN

WANN SIND GERADEN ORTHOGONAL?

ABSTAND PARALLELER GERADEN

BERECHNUNG EINES PARALLELOGRAMMS

Datei Nr. 20004

Stand 24. September 2024

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK UND STUDIUM

https://mathe-cd.de

Vorwort

Die Gleichung einer Geraden gehört nicht zu den schwierigen Themen. Dennoch staunt man, wieviel Unverständnis bei Schülern oft vorhanden ist, wenn es darum geht, Aufgaben zu diesem Thema zu lösen.

Ich fange nicht bei Null an, sondern möchte herausfinden, ob du eine Geradengleichung erkennst und ob du die zugehörende Gerade auch zeichnen kannst.

Dann erkläre ich noch einmal gründlich, welche Bedeutung die Zahlen in einer Geradengleichung haben, wie man eine Gerade zeichnet. Dann aber geht es sehr schnell darum, was passieren kann, wenn man zwei Geraden gegeben hat.

Sie können einander schneiden, dann gibt es einen Schnittpunkt und Schnittwinkel.
Sie können aber auch parallel sein, dann kann man berechnen, welchen Abstand sie haben.
Dabei muss man auch wissen, welche Beziehung es bei orthogonalen Geraden gibt,
(„orthogonal" bedeutet „aufeinander senkrecht stehen").

Übrigens: Was ist besser: „Zwei Geraden **schneiden sich**" oder
„Zwei Geraden **schneiden einander**" ?

denn eine Gerade schneidet ja nicht sich selbst sondern die andere ☺

Übrigens gibt es einfachere Texte für die Klassenstufen 7 bis 9:

12169	1. Schulstunde: Einführung von Geradengleichungen
12170	Geradengleichungen und lineare Funktionen (Für Klassenstufen 7 bis 9) (Alles – **ganz ausführlich** mit vielen Aufgaben)
12171	Schnittpunkte von Geraden berechnen
12173	Aufgabensammlung dazu (aus 12170 und 12171 entnommen)
11711	Zusammenstellung vieler Methoden zur Geometrie im Achsenkreuz: Kompakt

Und jetzt beginnen wir!

Am Ende kommt eine Seite mit allen Methoden, die wir dann besprochen haben.

$\boxed{1}$ **Unser Thema sind Geradengleichungen.**

Da ich nicht weiß, wieviel du über dieses einfache Thema weißt, beginne ich mit einer kleinen Aufgabe. Wenn du sie nicht lösen kannst, gehe auf die nächste Seite zu Abschnitt $\boxed{2}$. Dort erkläre ich meine Lösung.

Aufgabe: Berechne den Schnittpunkt S von g und h mit

g: $y = \frac{1}{2}x + 3$ und h: $y = -x + \frac{9}{2}$.

Kannst du diese Geraden auch im Achsenkreuz zeichnen? $\Rightarrow$ $\boxed{2}$

$\boxed{11}$ Die Lotgerade h hat die Gleichung $\mathbf{y = -\frac{3}{2}x + \frac{21}{4}}$

und g: $y = \frac{2}{3}x + 2$

Gleichsetzen: $\frac{2}{3}x + 2 = -\frac{3}{2}x + \frac{21}{4}$ | $\cdot 12$ und dann kürzen.

Brüche weg: $8x + 24 = -18x + 63$ | $+18x - 24$

$26x = 39$ | $:26$

Schnittpunkt: $x_F = \frac{39}{26} = \frac{3}{2}$

y-Koordinate aus g: $y_F = \frac{2}{3} \cdot \boxed{\frac{3}{2}} + 2 = 3$ (Das geht auch mit h!)

Ergebnis: g und h schneiden einander im **Lotfußpunkt** $F(1{,}5 \mid 3)$.

Nun kann man ganz einfach den Abstand des Punktes $P(-1{,}5 \mid 7{,}5)$ von g berechnen:

Es die Länge der Strecke PF: $d(P,g) = \overline{PF} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{3^2 + 2{,}5^2} = \sqrt{15{,}25} \approx 3{,}91$

Nun wollen wir eine Dreiecksaufgabe lösen, die ganz ähnlich geht:

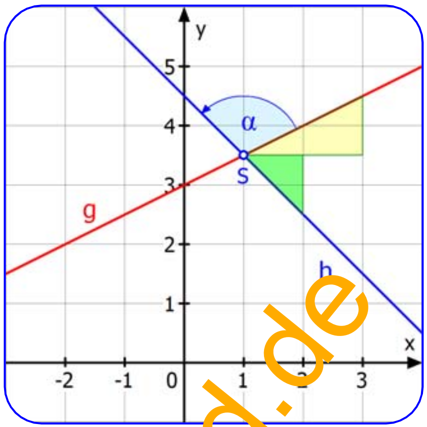
Aufgabe: Gegeben ist das Dreieck $A(-2 \mid 5)$, $B(2 \mid -2)$, $C(6 \mid 6)$:

Berechne den Dreiecksinhalt.

Anleitung: Berechne die Dreieckshöhe, indem du von A das Lot auf die Gerade BC fällst.

$\Rightarrow$ $\boxed{12}$

$\boxed{2}$ Gegeben sind g: $y = \frac{1}{2}x + 3$ und h: $y = -x + \frac{9}{2}$.



Da der Schnittpunkt auf beiden Geraden liegt, erfüllt er beide Gleichungen. Für ihn ist also

$y = \frac{1}{2}x + 3$ und $y = -x + \frac{9}{2}$ das gleiche!

$$\frac{1}{2}x + 3 = -x + \frac{9}{2} \qquad | +x - 3$$

$$\frac{3}{2}x = \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_S = 1$$

Aus g oder h folgt dazu $y_S = \frac{7}{2}$

Ergebnis: g und h schneiden einander in $S(1|\frac{7}{2})$.

Für die Zeichnung verwende ich zu jeder Geraden ein **Steigungsdreieck**.

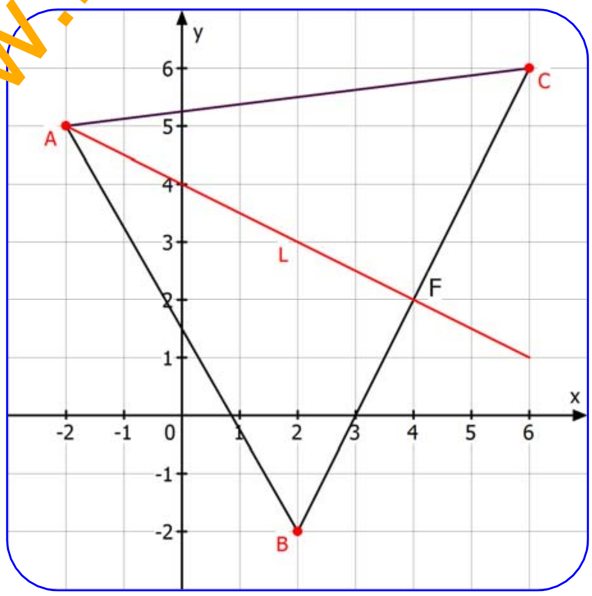
Ich habe mich entschieden, beide Dreiecke im Punkt S anzusetzen: Zum Beispiel so:

Wegen $m_g = \frac{1}{2}$ gehe ich für g von S um 2 nach rechts und um 1 nach oben

Wegen $m_h = -1$ gehe ich für h von S um 1 nach rechts und um 1 nach unten.

Weiß du, wie man den **Schnittwinkel** α zwischen g und h berechnet? $\rightarrow$ $\boxed{3}$

$\boxed{12}$ Gegeben sind $A(-2|5)$, $B(2|-2)$, $C(6|6)$.



Flächeninhalt des Dreiecks: $A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AF}$

wobei F der Fußpunkt des Lotes von A auf BC ist.

Dazu benötigt man die **Gleichung von (BC)**.

Steigung: $m_{BC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-(-2)}{6-2} = \frac{8}{4} = 2$

Punkt-Steigungsform: $y + 2 = 2(x - 2)$

Gerade (BC): $y = 2x - 6$

Lotgerade L auf (BC) durch A:

Steigung: $m_L = -\frac{1}{m_{BC}} = -\frac{1}{2}$

Punkt-Steigungsform: $y - 5 = -\frac{1}{2}(x + 2) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 4$

Schnittgleichung: $2x - 6 = -\frac{1}{2}x + 4 \qquad | \cdot 2$

$4x - 12 = -x + 8$

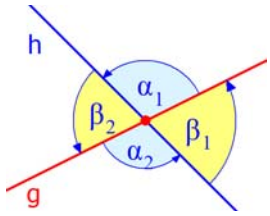
$5x = 20 \Rightarrow x_F = 4$

y-Koordinate aus (BC): $y_F = 2 \cdot \boxed{4} - 6 = 2$

Lotfußpunkt: $F(4|2)$

Berechne nun den **Inhalt des Dreiecks** ABC mit $A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AF}$. $\Rightarrow$ $\boxed{13}$

$\boxed{3}$ Aus der Trigonometrie kommt eine Formel, mit der man den Schnittwinkel zwischen zwei Geraden berechnen kann. Sie heißt $\mathbf{\tan\alpha = \left|\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|}$.



Zwei nicht parallele Geraden bilden **vier** Schnittwinkel, von denen jeweils zwei gleich groß sind. Schließen wir einmal aus, dass die Geraden nicht senkrecht zueinander sind, dann sind jeweils zwei kleiner als 90^O und zwei größer als 90^O. Durch den Betrag in der Formel wird der Tangenswert positiv und die Formel liefert den kleineren Winkel.

Beispiel:

Wir schneiden zwei Geraden mit den S $m_1 = \frac{1}{2}$ und $m_2 = -1$.

Die Tangensformel liefert dann $\tan\alpha = \left|\dfrac{\frac{1}{2} - (-1)}{1 + \frac{1}{2} \cdot (-1)}\right| = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \tan^{-1}(3) \approx 71{,}6^O$.

Die beiden Winkel, die größer als 90^O sind, haben dann die Größe $180^O - 71{,}6^O = 108{,}4^O$

Man muss dann nur darauf achten, dass der berechnete Winkel den richtigen Namen hat.

In unserer Zeichnung ist $\beta_1 = \beta_2 = 71{,}6^O$ und $\alpha_1 = \alpha_2 = 108{,}4^O$.

Noch ein Beispiel zum Üben:

Welche Schnittwinkel haben zwei Geraden mit den Steigungen $m_1 = \frac{5}{3}$ und $m_2 = -6$?

$\Rightarrow \boxed{4}$:

$\boxed{13}$ Wir haben diese Punkte: $A(-2 \mid 5)$, $B(2 \mid -2)$, $C(6 \mid 6)$ und $F(4 \mid 2)$.

Daraus berechnet man die

Länge der Grundseite: $\overline{BC} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80}$

Länge der Höhe: $\overline{AF} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45}$

Dreiecksinhalt: $A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AF} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{80} \cdot \sqrt{45}$

Hilfe: Man kann partiell die Wurzeln ziehen: $\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4 \cdot \sqrt{5}$ und $\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3 \cdot \sqrt{5}$

Damit folgt: $A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AF} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{80} \cdot \sqrt{45} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} = \boxed{30}$

denn $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$.

$\Rightarrow \boxed{14}$

$\boxed{4}$ Gegeben sind die Steigungen $m_1 = \frac{5}{3}$ und $m_2 = -6$. Für einen Schnittwinkel gilt:

$$\tan\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right| = \left|\frac{\frac{5}{3}+6}{1+\frac{5}{3}\cdot(-6)}\right| = \left|\frac{\frac{23}{3}}{-9}\right| = \frac{23}{27} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{23}{27}\right) \approx 40{,}4^\circ$$

Also gibt es zwei Schnittwinkel der Größe $40{,}4^\circ$ und zwei Schnittwinkel der Größe

$\beta = 180^\circ - \alpha \approx 139{,}6^\circ$.

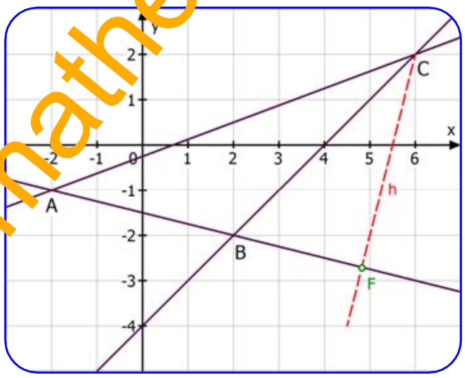
```
tan⁻¹ 23/27
              40.4260
180−Ans
             139.573
```

Und noch eine Übung mit $m_1 = -3$ und $m_2 = -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \boxed{5}$

$\boxed{14}$

Nun folgt eine zweite Dreiecksaufgabe.



Diese drei Geraden begrenzen ein Dreieck ABC.

Gegeben sind: g_1: $y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}$

g_2: $y = x - 4$

g_3: $y = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}$.

Berechne zuerst selbst die Koordinaten der Schnittpunkte,

bevor du meine Lösung anschaust.

$g_1 \cap g_2 = \{B\}$ $\quad -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2} = x - 4 \Leftrightarrow -x - 6 = 4x - 16 \Leftrightarrow 5x = 10 \Leftrightarrow x_B = 2$

$y_B = \boxed{2} - 4 = -2$ $\quad B(2\,|\,-2)$

$g_1 \cap g_3 = \{A\}$ $\quad -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2} = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4} \Leftrightarrow -2x - 12 = 3x - 2 \Leftrightarrow 5x = -10 \Leftrightarrow x_A = -2$

$y_A = -\frac{1}{4}\cdot\boxed{-2} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$ $\quad A(-2\,|\,-1)$

$g_2 \cap g_3 = \{C\}$ $\quad x - 4 = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4} \Leftrightarrow 8x - 32 = 3x - 2 \Leftrightarrow 5x = 30 \Leftrightarrow x_C = 6$

$y_C = 6 - 4 = 2$ $\quad C(6\,|\,2)$

Hast du bemerkt, dass ich die Gleichungen so verändere, dass alle Brüche verschwinden?

Berechne nun die Gleichung der Lotgeraden von C auf (AB) und den Lotfußpunkt F.

$\Rightarrow \boxed{15}$

$\boxed{5}$ Gegeben sind die Steigungen $m_1 = -3$ und $m_2 = -\frac{1}{3}$

Für einen Schnittwinkel gilt dann

$$\tan\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right| = \left|\frac{-3 + \frac{1}{3}}{1 + (-3)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}\right| = \left|\frac{-\frac{8}{3}}{2}\right| = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha_{1,2} = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53{,}13^\circ$$

Die beiden anderen Schnittwinkel haben dann die Größe

$$\beta_{1,2} \approx 180^\circ - 53{,}13^\circ = 126{,}87^\circ$$

Jetzt eine spezielle und wichtige Aufgabe:

Welche Schnittwinkel haben zwei Geraden mit den Steigungen $m_1 = \frac{1}{2}$ und $m_2 = -2$?

Die Tangensformel liefert $\tan\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2} + 2}{1 + \frac{1}{2}\cdot(-2)}\right| = \cancel{\left|\frac{\frac{5}{2}}{0}\right|}$

Wir stellen fest, dass es hierzu <u>keinen Tangenswert</u> gibt, da man nicht durch 0 teilen kann.

Aber die Geraden schneiden einander doch. Wie findet man dann deren Schnittwinkel? $\Rightarrow$ $\boxed{6}$

$\boxed{15}$ Wir haben $A(-2\,|\,-1)$, $B(2\,|\,-2)$, $C(6\,|\,2)$.

Die Gerade AB ist g_1: $y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}$ und hat die Steigungszahl $-\frac{1}{4}$

Die **Lotgerade** h hat daher die Steigung $m_L = +4$ (negativer Kehrwert).

Gleichung von h mit der „PSF“: $y - 2 = 4(x - 6) \Rightarrow y = 4x - 22$.

Der Lotfußpunkt ist der Schnittpunkt von h und g_1:

$$4x - 22 = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2} \quad | \cdot 4$$

$$16x - 88 = -x - 6$$

$$17x = 82 \quad \Rightarrow \quad x_F = \frac{82}{17}$$

Die y-Koordinate folgt aus g_1 (oder aus h): $y_F = -\frac{1}{4}\cdot\frac{82}{17} - \frac{3}{2} = -\frac{41}{2\cdot 17} - \frac{3}{2}\cdot\frac{17}{17} = -\frac{92}{34} = -\frac{46}{17}$

Der Lotfußpunkt ist also $F\left(\frac{82}{17}\,\middle|\,-\frac{46}{17}\right) \approx (4{,}8\,|\,-2{,}7)$.

Hinweis: Ich gebe zu, dass diese Rechnung eine Zumutung ist. Solche Brüche sind schwer zu berechnen. Doch wenn einem während der Rechnung ein Fehler passiert, können solche Zahlen entstehen, auch wenn sie von der Aufgabe her nicht vorgesehen waren. Daher sollte man in der Lage sein, die Aufgabe mit solchen hässlichen Zahlen zu Ende zu rechnen. Also machen wir weiter mit dieser wichtige Rechenübung!

Nun berechne die Länge der Grundseite $\overline{AB}$ und der Höhe $\overline{CF}$. Daraus entsteht dann der Inhalt.

$\Rightarrow$ $\boxed{16}$

$\boxed{6}$ Wenn in der Tangensformel: $\tan\alpha = \left|\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right| = \cancel{\left|\dfrac{m_1 - m_2}{0}\right|}$ der Nenner 0 wird,

hat der Schnittwinkel keinen Tangenswert.

In der Trigonometrie hat man gelernt, dass $\tan 90^\circ$ nicht existiert, bzw. ein unendlich großer Wert sein sollte. (Das gilt auch für 270° usw., die aber keine Schnittwinkel sein können.)

Wir folgern also daraus:

Die Nenner-Beziehung $1 + m_1 \cdot m_2 = 0$ passt also genau zu orthogonalen Geraden ($\alpha = 90^\circ$).

MERKE:

Wenn zwei Geraden orthogonal sind (aufeinander senkrecht stehen)

gilt für ihre Steigungen $\boxed{\mathbf{m_1 \cdot m_2 = -1}}$ bzw. $\boxed{\mathbf{m_2 = -\dfrac{1}{m_1}}}$

Umgekehrt folgt aus dieser Gleichung ein Schnittwinkel von 90°.

AUFGABE: Eine Gerade g hat eine der Steigungen 2 oder $\frac{1}{4}$ oder -5 oder $-\frac{2}{7}$.

Welche Steigung hat dann eine Gerade h, die auf g senkrecht steht? $\Rightarrow$ $\boxed{7}$

$\boxed{16}$ Wir haben $A(-2\,|\,-1)$, $B(2\,|\,-2)$, $C(6\,|\,2)$ und $F\left(\dfrac{82}{17}\,\middle|\,-\dfrac{46}{17}\right)$

Als Grundseite wähle ich die Strecke AB. Ihre Länge erhält man mit der Formel $\overline{AB} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$:

$$\overline{AB} = \sqrt{4^2 + 1^1} = \sqrt{17}$$

Die Höhe ist dann die Strecke CF mit $\overline{CF} = \sqrt{\left(6 - \frac{82}{17}\right)^2 + \left(2 + \frac{46}{17}\right)} = \sqrt{\left(\frac{20}{17}\right)^2 + \left(\frac{80}{17}\right)^2}$

Jetzt kommt ein **Rechentrick**:

Man kann unter der Wurzel $\left(\frac{20}{17}\right)^2$ ausklammern. Das sieht dann so aus:

$$\overline{CF} = \sqrt{\left(6 - \tfrac{82}{17}\right)^2 + \left(2 + \tfrac{46}{17}\right)} = \sqrt{\left(\tfrac{20}{17}\right)^2 + \left(\tfrac{80}{17}\right)^2} = \sqrt{\left(\tfrac{20}{17}\right)^2 \cdot \left[1^2 + 4^2\right]} = \tfrac{20}{17} \cdot \sqrt{17}$$

Was jetzt passiert, ist unglaublich: $\sqrt{17}$ fällt weg: $A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{CF} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{17} \cdot \frac{20}{17} \cdot \sqrt{17} = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot \frac{20}{17} = 10$

Bei diesen „krummen“ Zahlen erhält man einen ganzzahligen Wert für den Flächeninhalt.
Diese „schöne“ Rechnung setzt allerdings voraus, dass man fehlerfrei durchkommt.

Hinweis: *Man findet mehrere solche Aufgaben mit diesen glatten Ergebnissen im Text 20050 in den Aufgaben 10 bis 13. Gute Übungsaufgaben!*

Es geht weiter in $\Rightarrow$ $\boxed{17}$

$\boxed{7}$ **WISSEN:** $g \perp h \;\Leftrightarrow\; m_h = -\dfrac{1}{m_g}$ (negativer Kehrwert!)

Zu g mit	$\Rightarrow$	ist h orthogonal mit
$m_g = 2$	$\Rightarrow$	$m_h = -\frac{1}{2}$
$m_g = \frac{1}{4}$	$\Rightarrow$	$m_h = -4$
$m_g = -5$	$\Rightarrow$	$m_h = \frac{1}{5}$
$m_g = -\frac{2}{7}$	$\Rightarrow$	$m_h = \frac{7}{2}$

Aufgabe: Gegeben sind die Gerade g: $y = 1$ und die Gerade h: $y = -2{,}5x + 6$

Berechne den Schnittpunkt und auf einfachste Weise

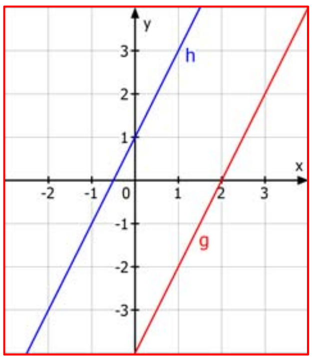
die Schnittwinkel von g und h. $\Rightarrow$ $\boxed{8}$

$\boxed{17}$ ***Nun wollen wir uns mit parallelen Geraden beschäftigen.***

Zwei Geraden nennt man parallel, wenn sie dieselbe Richtung haben. Sagt man statt Richtung besser Richtungswinkel, dann ist klar, dass parallele Geraden dieselbe Steigungszahl m haben.

g: $y = 2x - 4$, h: $y = 2x + 1$ oder k: $y = 2x$ sind parallele Geraden mit der Steigung 2.
Parallele Geraden schneiden einander nicht, denn sie haben überall den gleichen Abstand.

Wie berechnet man den Abstand paralleler Geraden?



Als Abstand zweier paralleler Geraden bezeichnet man die kürzeste Entfernung zweier Punkte auf den Geraden.

Man kann beweisen, dass man dazu die Geraden mit einer zu beiden orthogonalen Geraden schneiden muss. Die Entfernung dieser Schnittpunkte ist dann der Abstand der Parallelen.

Es geht trickreich schneller, wenn man einen bekannten Punkt von g nimmt und dann das Lot auf g fällt, was den zweiten Punkt ergibt. Dann kann man den Abstand berechnen.

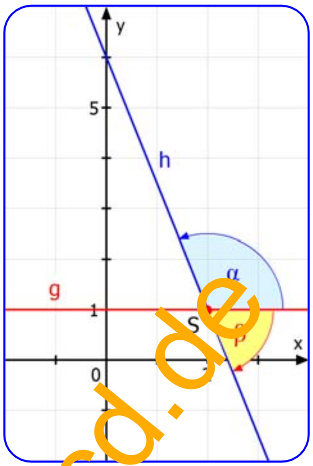
Versuche es bitte: $\Rightarrow$ $\boxed{18}$

$\boxed{8}$ Gegeben sind die Geraden g: $y = 1$ und h: $y = -2{,}5x + 6$.

Schnittpunkt: $1 = -2{,}5x + 6$

$2{,}5x = 5 \quad \Rightarrow \quad x_S = 2$.

Ergebnis: $S(2\,|\,1)$



Für den Schnittwinkel zuerst die umständliche Lösung:

$$\tan\beta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right| = \left|\frac{0-(-2{,}5)}{1+0\cdot(-1{,}5)}\right| = \frac{2{,}5}{1} = 2{,}5 \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 68{,}2^\circ$$

Also folgt: $\alpha \approx 180^\circ - 68{,}2^\circ = 111{,}8^\circ$

Und jetzt die Superlösung:

Weil g parallel zur x-Achse ist, sind α bzw. β Steigungswinkel gegen die x-Achse.

Dazu braucht man keine Schnittwinkel-Formel!

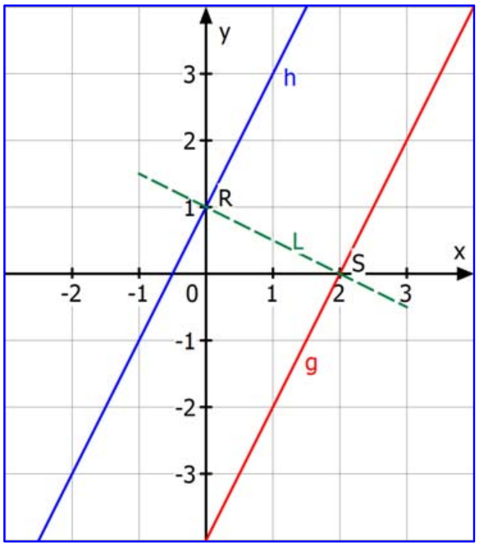
Es reicht: $\tan\beta = |m_h| = 2{,}5 \quad \Rightarrow \quad \beta = \tan^{-1}(2{,}5) = 68{,}2^\circ$ nach unten bei negativer Steigung und daher $\alpha = 180^\circ - \beta = 180^\circ - 68{,}2^\circ \approx 111{,}8^\circ$

Aufgabe: Gegeben sind die Gerade h: $x = 2$ und die Gerade g: $y = 3x - 1$. Berechne den Schnittpunkt und auf einfachste Weise die Schnittwinkel von g und h. $\Rightarrow$ $\boxed{9}$

$\boxed{18}$ Ich wähle den Achsenabschnittspunkt $R(0\,|\,1)$ von h und fälle von R das Lot auf g.

Aus $m_g = 2$ folgt $m_L = -\frac{1}{2}$. Und man kann sofort die Gleichung der Lotgeraden aufschreiben:

L: $y = -\frac{1}{2}x + 1$.



Schnitt von g und L: $2x - 4 = -\frac{1}{2} + 1$

$\frac{5}{2}x = 5 \quad \Rightarrow \quad x_S = 2$

Aus L: $y_S = -\frac{1}{2}\cdot 2 + 1 = 0$

Schnittpunkt: $S(2\,|\,0)$.

Die Länge der Strecke RS ist der gesuchte Abstand von g und h.

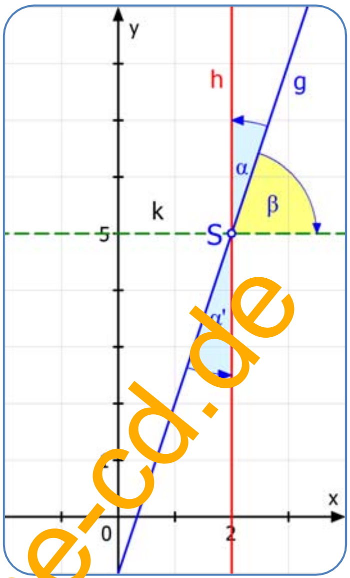
Das kann man so aufschreiben: $d(g,h) = \overline{RS} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

Also nächstes erzeugen wir mit zwei Paaren paralleler Geraden ein Parallelogramm.

Die Aufgabe steht in $\Rightarrow$ $\boxed{19}$

9 Gegeben sind die Geraden h: $x = 2$ und g: $y = 3x - 1$.

Da h eine Parallele zur y-Achse ist, besitzt sie keine Steigungszahl. Die Tangens-Formel ist also nicht anwendbar.
Ich habe noch die Gerade k: y = 5 eingezeichnet, eine Parallele zur x-Achse durch den Schnittpunkt S.



Jetzt erkennt man, dass g und k den Steigungswinkel β von g einschließen. Also berechnet man hier zuerst:

$$\tan\beta = 3 \quad \Rightarrow \quad \beta = \tan^{-1}(3) \approx 71{,}6^{\circ}$$

Da h und k orthogonal sind, folgt $\alpha = 90^{\circ} - \beta = 18{,}4^{\circ}$.

Der zweite Winkel zwischen g und h hat $180^{\circ} - \alpha \approx 161{,}6^{\circ}$.

Aufgabe: Welche Gleichung hat die Gerade h durch $P(-1{,}5 \mid 7{,}5)$, die senkrecht auf g steht mit g: $y = \frac{2}{3}x + 2$ $\Rightarrow$ 10

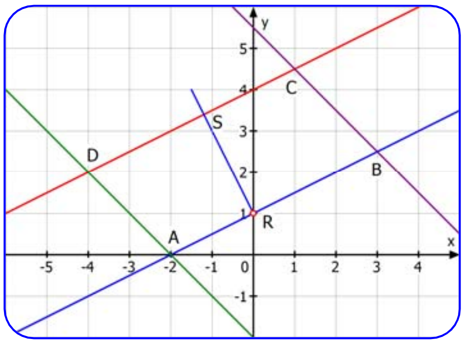
---

19 Diese vier Geraden sind gegeben.

g_1: $y = \frac{1}{2}x + 4$ und g_2: $y = \frac{1}{2}x + 1$

h_1: $y = -x - 2$ und h_2: $y = -x + 5{,}5$

Ich habe die Geraden gezeichnet.



Berechne die Eckpunkte A, B, C, D des entstehenden Parallelogramms.

Der Flächeninhalt eines Parallelogramms wird berechnet durch $A_{\square} = \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}$.

Verwende die Strecke RS als Höhe auf die Grundseite AB.

Nun rechne bitte selbständig. Meine Kurzlösung steht in 20

$\boxed{10}$ Ich formuliere diese Aufgabe so: $\boxed{\text{Fälle das Lot von } P(-1{,}5\,|\,7{,}5) \text{ auf g: } y = \tfrac{2}{3}x + 2}$

Die Gerade g hat die Steigung $m_g = \frac{2}{3}$.

Dann hat die **Lotgerade** die Steigung $m_h = -\dfrac{1}{m_g} = -\dfrac{3}{2}$

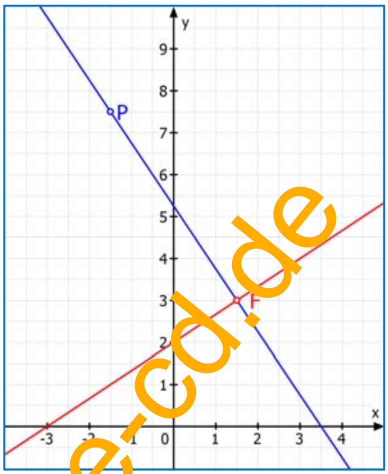
(der negative Kehrwert!). h soll durch P gehen, also stellt man die Gerade von h mit der Punkt-Steigungs-Form auf:

$$y - y_P = m_h \cdot (x - x_P)$$

$$y - 7{,}5 = -\tfrac{3}{2}(x + 1{,}5)$$

$$y = -\tfrac{3}{2}x - \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{3}{2} + \tfrac{15}{2}$$

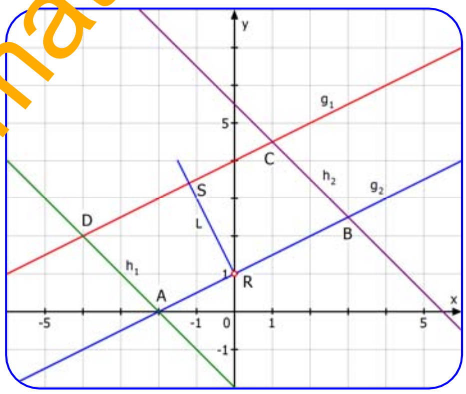
$$\mathbf{y = -\tfrac{3}{2}x + \tfrac{21}{4}}$$



Berechne den Schnittpunkt F von g und h (das ist der Lotfußpunkt). $\Rightarrow$ $\boxed{11}$ auf Seite 3!

$\boxed{20}$ g_1: $y = \frac{1}{2}x + 4$ und g_2: $y = \frac{1}{2}x + 1$

h_1: $y = -x - 2$ und h_2: $y = -x + 5{,}5$



Eckpunkte des Parallelogramms:

$g_2 \cap h_1 = \{A\}$: $\frac{1}{2}x + 1 = -x - 2 \Rightarrow \frac{3}{2}x = -3 \Rightarrow x_A = -2$

$y_A = -(-2) - 2 = 0 \Rightarrow \mathbf{A(-2\,|\,0)}$

$g_2 \cap h_2 = \{B\}$: $\frac{1}{2}x + 1 = -x + 5{,}5 \Rightarrow \frac{3}{2}x = \frac{9}{2} \Rightarrow x_B = 3$

$y_B = -3 + 5{,}5 = 0 \Rightarrow \mathbf{B(3\,|\,2{,}5)}$

$g_1 \cap h_2 = \{C\}$: $\frac{1}{2}x + 4 = -x + 5{,}5 \Rightarrow \frac{3}{2}x = \frac{3}{2} \Rightarrow x_C = 1$ $y_C = \frac{1}{2} \cdot 1 + 4 = 4{,}5 \Rightarrow \mathbf{C(1\,|\,4{,}5)}$

$g_1 \cap h_1 = \{D\}$: $\frac{1}{2}x + 4 = -x - 2 \Rightarrow \frac{3}{2}x = -6 \Rightarrow x_D = -4$ $y_D = -(-4) - 2 = 42 \Rightarrow \mathbf{D(-4\,|\,2)}$

Die Grundseite AB des Parallelogramms hat die Länge $\overline{AB} = \sqrt{5^2 + 2{,}5^2} = \sqrt{2{,}5^2 \cdot (2^2 + 1^2)} = 2{,}5 \cdot \sqrt{5}$

Für die Höhe braucht man den Abstand der Parallelen g_1 und g_2. Dazu fälle ich das Lot von $\mathbf{R(0\,|\,1)}$

auf die Gerade g_1. $m_h = -\dfrac{1}{m_{g1}} = -2$. Lotgerade: $y = -2x + 1$.

Lotfußpunkt auf g_1: $\frac{1}{2}x + 4 = -2x + 1 \Leftrightarrow \frac{5}{2}x = -3 \Rightarrow x_F = -\frac{6}{5} = -1{,}2$

$y_F = -2 \cdot (-1{,}2) + 1 = 5{,}2 \Rightarrow \mathbf{F(-1{,}2\,|\,3{,}4)}$

Höhe des Parallelogramms: $h = \overline{RF} = \sqrt{1{,}2^2 + 2{,}4^2} = \sqrt{1{,}2^2 \cdot (1^2 + 2^2)} = 1{,}2 \cdot \sqrt{5}$

Flächeninhalt des Parallelogramms: $\boxed{A_{\square} = \overline{AB} \cdot \overline{RF}} = 2{,}5 \cdot \sqrt{5} \cdot 1{,}2 \cdot \sqrt{5} = 2{,}5 \cdot 1{,}2 \cdot 5 = 15$!!!!

Das war's für heute. Nun schaue Dir noch die wichtige Seite 21 an – Das musst Du wissen:

In der nächsten Stunde (20010) geht es dann um Geradenscharen.

CIAO

Wenn du alle 20 Abschnitte durchgearbeitet hast:

21 Was hast Du in dieser Stunde gelernt?

1. In der Gleichung $y = mx + n$ gibt n die Steigung an. Diese Zahl ist der Tangens des Steigungswinkels. n ist die Schnittstelle auf der y-Achse.

2. Einen **Schnittwinkel** zweier Geraden kann man mit der Formel $\tan\alpha = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|$ berechnen.

   Da klappt aber nur, wenn der Nenner nicht 0 wird. Ist das der Fall weil $m_1 \cdot m_2 = -1$ ist, dann sind die beiden **Geraden orthogonal** (Abschnitt $\boxed{6}$).

   Wenn eine der Geraden parallel zur x-Achse oder zur y-Achse ist, dann braucht man diese Schnittwinkelformel nicht (Abschnitt $\boxed{8}$ und $\boxed{9}$).

3. Die Steigung einer **Lotgeraden** erhält man mit $m_L = -\frac{1}{m_g}$ und der Punkt-Steigungs-Form $\boxed{10}$.

4. Den **Abstand eines Punktes von einer Geraden** erhält man, indem man die Lotgerade aufstellt und mit der gegebenen Gerade schneidet, was zum Lotfußpunkt F führt.
   Die Abstandsformel ist . $d(P;g) = \overline{PF} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ (Abschnitt $\boxed{10}$ und $\boxed{11}$).

5. Den **Inhalt eines Dreiecks** berechnet man mit der Formel **A_Δ**$= \frac{1}{2} \cdot \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}$:

   Die Höhe wird dann wie in 4. als Abstand eines der Dreieckspunkte von der gegenüber liegenden Dreiecksseite bestimmt. (Abschnitte $\boxed{12}$ bis $\boxed{16}$).

6. Geraden mit gleicher Steigungszahl sind parallel.

   Den **Abstand paralleler Geraden** g_1 und g_2 erhält man so: Man wählt auf g_1 einen Punkt P_1 und fällt das Lot von P_1 auf g_2. Das ergibt den Lotfußpunkt F auf g_2.

   Die Länge der Strecke P_1F ist der gesuchte Abstand: $d(g_1, g_2) = \overline{P_1F} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ($\boxed{17}$)

7. Den **Flächeninhalt eines Parallelogramms** berechnet man mit im Grunde derselben Methode: Die Inhaltsformel lautet $A_{\square} = g \cdot h$. Die Grundseite ist eine der vier Seiten. Die Höhe ist der Abstand dieser Seite von der zu ihr parallelen, wie in 6. besprochen. (Methode $\boxed{19}$).